VINCENZO AIETA

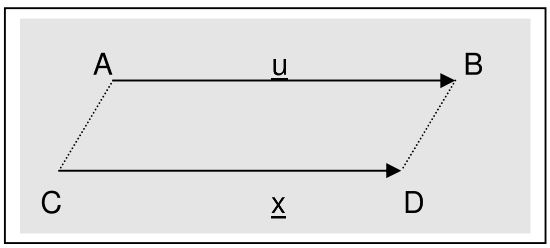
Spazi vettoriali

2.1 Vettori ed operazioni

Sia **V** un insieme di segmenti orientati ed **R** una relazione di "equipollenza" definita in esso. Due qualsiasi elementi di **V** stanno nella **R** se hanno:
1) La medesima direzione; 2) Il medesimo verso; 3) La medesima lunghezza o modulo.
R è una relazione di equivalenza poichè gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e, come tale, determina una partizione di **V** in sottoinsiemi, "**classi di equivalenza"**, elementi di un nuovo insieme detto "**insieme quoziente**".

$$\frac{V}{R} = \{[\,\underline{u}\,], [\,\underline{v}\,], [\,\underline{w}\,], [\,\underline{o}\,], \ldots\}$$

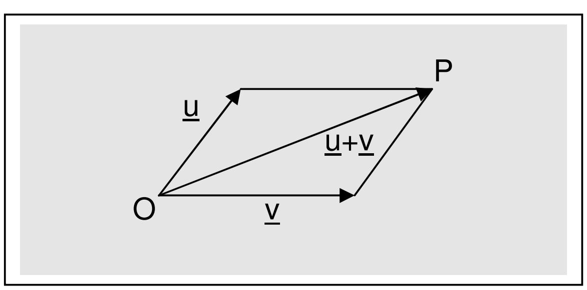
Gli elementi di **V**/**R** formano una partizione di **V** nel senso che: nessuna classe è vuota, due di esse sono ad intersezione vuota, la loro unione dà tutto **V**.
Si definisce vettore ogni classe di segmenti orientati equipollenti.



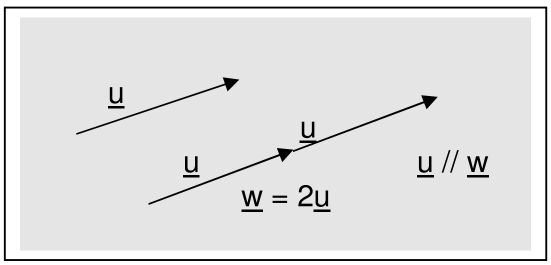
$\underline{u}\ R\ \underline{x} \Leftrightarrow \underline{x} \in [\,\underline{u}\,]$

Un vettore è dunque **individuato** da un qualsiasi segmento orientato di **V** e quindi **da :**
1) **Una direzione** (quella della retta a cui appartiene il segmento);
2) **Un verso** (quello indicato dalla freccia, da A a B);
3) **Un numero positivo, detto "modulo" o "norma**" del vettore, che esprime la misura del segmento. Esso si indica con $\|\underline{u}\|$.

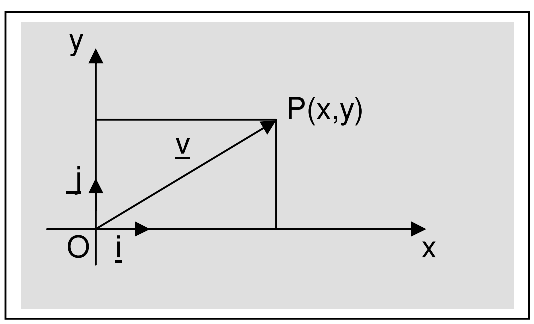
In particolare il vettore di modulo uguale a zero, A=B, prende il nome di **vettore nullo $\underline{\mathbf{0}}$** e quello di modulo uguale a 1 di "**versore"** o "vettore unitario".
Consideriamo, per il momento, l'insieme **V** dei vettori del piano applicati nell'origine.
Si definisce **somma** dei due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$, applicati in O, il vettore $\underline{u} + \underline{v}$ avente punto di applicazione in O e direzione, verso e modulo della diagonale del parallelogramma di lati $\underline{u}$ e $\underline{v}$.



Poichè l'addizione in **V** è associativa, ammette l'elemento neutro $\underline{0}$, l'opposto $-\underline{u}$, ed è commutativa ne segue che **la struttura algebrica V(+) è un gruppo abeliano**.
L'addizione tra vettori è un'operazione interna perché $\underline{u} + \underline{v}$ è ancora un elemento di **V** e può essere definita come una legge che **ad ogni coppia** $(\underline{u}, \underline{v}) \in$ **V associa** un elemento $\underline{w} = \underline{u} + \underline{v}$ **ancora in V**.
Siano, ora, $\underline{\mathbf{v}} \in$ **V** ed $a \in$ **R**, campo dei numeri reali; **si definisce prodotto** di un vettore $\underline{v}$ per un numero reale a (scalare) il vettore avente come direzione la direzione di $\underline{v}$, come verso quello di $\underline{v}$ se $a > 0$ il verso opposto se $a < 0$, come modulo il prodotto $|a| \cdot \|\underline{v}\|$.
Si tratta, come l'addizione, di un'operazione interna a **V** e può essere intesa come una legge che **ad ogni coppia** $(a, \underline{v})$ **associa il vettore** $\underline{w} = a \cdot \underline{v}$.
Essa gode di alcune proprietà, che vedremo appresso, per effetto delle quali **V (+,·) è uno spazio vettoriale**.



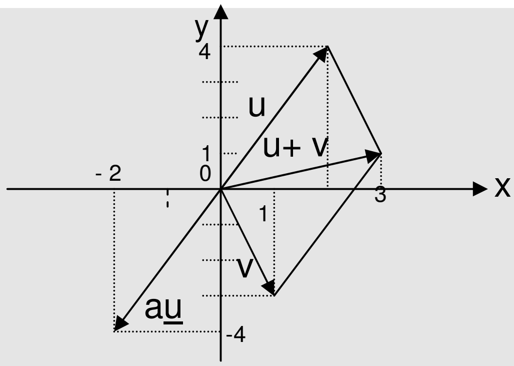
Dato un vettore $\underline{v}$ del piano, applicato in 0, è possibile associare a $\underline{v}$ una coppia ordinata di numeri reali (x, y), componenti di $\underline{v}$ nella direzione degli assi cartesiani, e viceversa.
Questa corrispondenza biunivoca tra l'insieme V dei vettori del piano e l'insieme $\mathbf{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, **consente di estendere le operazioni di V ad $\mathbf{R}^2$** per cui operare in $\mathbf{R}^2$ significa, in pratica, operare in **V**.
Scomponendo $\underline{v}$ nella direzione degli assi otteniamo:



$\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{x}\underline{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\underline{\mathbf{j}}$ forma cartesiana di $\underline{v}$, in cui $\underline{\mathbf{i}}$ **(1,0)** e $\underline{\mathbf{j}}$ **(0,1)** sono i versori fondamentali degli assi cartesiani e la norma di $\|\underline{v}\|$ è data da $\sqrt{x^2 + y^2}$, distanza PO.

Esempio 1 Eseguire l'addizione tra $\underline{v}$ (1,-3) e $\underline{u}$ (2,4) ed il prodotto tra $\underline{u}$ ed il numero reale a = -1.
$\underline{v} = 1\underline{i} - 3\underline{j}$; $\underline{u} = 2\underline{i} + 4\underline{j}$; $\Rightarrow \underline{u} + \underline{v} = 3\underline{i} + \underline{j}$; $\underline{u} = 2\underline{i} + 4\underline{j}$; $a = -1$; $\Rightarrow a\underline{u} = -1(2\underline{i} + 4\underline{j}) = -2\underline{i} - 4\underline{j} = \underline{w}$
$\underline{u}$ e $\underline{w}$, avendo le componenti proporzionali, sono paralleli.

Graficamente :



2.2 Spazio vettoriale

Sia **V** un insieme, non vuoto, di vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ..., munito di addizione:

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$
$$(\underline{u}, \underline{v}) \to \underline{w} \qquad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbf{V}$$

e di prodotto di un campo K su **V** : $\cdot : \mathbf{V} \times K \to \mathbf{V}$

$$(a, \underline{v}) \to a\underline{v} \quad \forall a \in K, \underline{v} \in \mathbf{V}$$

se : **V(+)** è un gruppo abeliano cioè:

1) $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbf{V} \Rightarrow (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ Proprietà associativa

2) $\forall \underline{u} \in \mathbf{V}\ \exists\ \underline{0} \in \mathbf{V}$, $\underline{0}$ elemento neutro per l'addizione / $\underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u}$

3) $\forall \underline{u} \in \mathbf{V}\ \exists\ \underline{u}' \in \mathbf{V}$ / $\underline{u} + \underline{u}' = \underline{u}' + \underline{u} = \underline{0}$ Esistenza del simmetrico o opposto

4) $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ Proprietà commutativa

E se valgono le seguenti proprietà:

1) $a(\underline{u} + \underline{v}) = a\underline{u} + a\underline{v} \quad \forall a \in K, \quad \underline{u}, \underline{v} \in \mathbf{V}$

(Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione tra vettori)

2) $(a + b)\underline{u} = a\underline{u} + b\underline{u} \qquad \forall a,b \in K, \quad \underline{u} \in \mathbf{V}$

(Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione tra scalari)

3) $a(b\underline{u}) = (ab)\underline{u} \qquad \forall a,b \in K, \quad \underline{u} \in \mathbf{V}$

(Proprietà associativa del prodotto scalare)

$1 \cdot \underline{u} = \underline{u} \quad \forall\, \underline{u} \in V$ (1 elemento neutro della moltiplicazione in R)

Diremo che la struttura V (+,·) è uno spazio vettoriale.

Esempi

Sia **V** = R^2 l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali e sia K = R il campo degli scalari. Se definiamo in **V**, come addizione, la legge:

$$(a,b) + (c,d) \to (a + c, b + d)$$

e come moltiplicazione per uno scalare la legge: $h(a,b) \to (ha, hb)$

è semplice verificare che **R^2 (+, ·) è uno spazio vettoriale su R**.
Si dice che R^2 (+, ·) è isomorfo allo spazio **V** dei vettori del piano applicati in 0. Il vettore nullo è $\underline{0} = (0,0)$, il simmetrico di $\underline{u} = (a,b)$ è $-\underline{u} = (-a,-b)$.
Analogamente si può provare che l'insieme dei numeri reali R dotato delle stesse operazioni, **R (+, ·), è uno spazio vettoriale su se stesso**, isomorfo a quello dei vettori applicati nell'origine di una retta orientata.
Così anche **V** = R^3 , strutturato con le solite operazioni è uno **spazio vettoriale R^3 (+, ·)su R** isomorfo ai vettori dello spazio euclideo a tre dimensioni applicati nell'origine.

2.3 Sottospazi vettoriali

Sia **V** uno spazio vettoriale su R ed **S** un sottoinsieme di **V**. Siano assegnate in **S** l'addizione tra vettori di **V** ed il prodotto di uno scalare di R per un vettore di **V**.
Diremo che S è un sottospazio vettoriale di V su R se, operando in S con le operazioni di V il risultato rimane in S, cioè S è chiuso rispetto alle operazioni di V.

Esempio

Nell'insieme R^3 = **V** delle terne ordinate di numeri reali, l'insieme

$$\mathbf{S} = \{\forall\ (x,0,0) \ /\ x \in R\}$$

È un sottospazio, di equazione {z = 0, y =0 } che individua l'asse delle x, mentre

$$\mathbf{S} = \{\forall\ (x,y,0) \ /\ x \in R\}$$

È un sottospazio di equazione z = 0, che individua il piano xy. I sottospazi di R^3 sono $2^3 = 8$ e cioè i piani xy, yz, xz, gli assi, l'origine e tutto R^3.

Esempio

L'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 su R, $M^{(2x2)}$ (+,·), strutturato con l'addizione tra matrici ed il prodotto di uno scalare per una matrice, è uno spazio vettoriale.L'insieme delle matrici diagonali $M_d^{(2x2)}$ (+, ·) è un sottospazio vettoriale di $M^{(2x2)}$, così quello delle matrici triangolari.

Matrice 2x2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Matrice diagonale $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ Matrice triangolare $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

2.4 Sistema di generatori

Sia **V** uno spazio vettoriale su R ed **S** = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n\}$ un sistema di vettori di **V**. Diremo che **S** è un sistema di generatori di **V** se ogni vettore $\underline{u} \in V$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di S, cioè se esistono n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ di R tali che:

$$u = \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{u}_n$$

Esempio

I vettori (1,2) e (2,1) generano tutto il piano R^2, difatti:

$$\lambda_1 (1,2) + \lambda_2 (2,1) = (a,b)$$

con (a,b) generico vettore di R^2, dà l'unica soluzione:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ \underline{-4\lambda_1 - 2\lambda_2 = -2b} \\ -3\lambda_1 = a - 2b \end{cases} \qquad \lambda_1 = \frac{2b - a}{3}; \quad \lambda_2 = b - 2\lambda_1 = \frac{2a - b}{3};$$

2.5 Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Sia **S** = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n\}$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale **V** su R. Diremo che $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n$ sono linearmente dipendenti se esistono n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ di R non tutti nulli, che danno come combinazione lineare il vettore nullo:

$$\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{u}_n = \underline{0} \qquad (1)$$

se invece la (1) è vera se e solo se $\lambda_i = 0 \ \forall_i$, allora i vettori si diranno linearmente indipendenti.

2.6 Base di uno spazio vettoriale

Sia **S** un sistema di vettori di uno spazio vettoriale **V** sul campo dei reali R. **S**= {$\underline{u}_1$, $u_{\underline{2}}$,..,$\underline{u}_n$}
Si dice che **S è una base di V** se vale una delle seguenti proposizioni tra loro equivalenti:

1) **S è generante minimale** (è il più piccolo sistema di vettori di **V** che genera **V**);

2) **S è indipendente massimale** (è il più grande sistema di vettori di **V** lin. indipendente);

3) **S è linearmente indipendente e genera V.**

Si definisce **dimensione** di uno spazio vettoriale **V** il numero di vettori di ogni sua base. Pertanto la retta è uno spazio vettoriale di dimensione 1, il piano di dimensione 2, lo spazio euclideo di dimensione 3.
Ogni spazio vettoriale ha almeno una base, detta base canonica, costituita dai vettori unitari.
Così **S** = {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} è una base canonica di R^3, mentre

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base canonica di $M^{(2x2)}$ di dimensione 4.Infatti:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è vera $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e qualunque matrice di ordine 2 si può esprimere come combinazione delle matrici date.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a\,; \quad \lambda_2 = b\,; \\ \lambda_3 = c\,; \quad \lambda_4 = d\,; \end{cases}$$