VINCENZO AIETA

Matrici,determinanti, sistemi lineari

1.1 Definizione di campo.

Dato un insieme A, dotato di due operazioni interne ($*$, $\perp$), A $\neq \Phi$, si dice che la struttura algebrica A($*$, $\perp$), di sostegno A, è un campo se:

(1) **A($*$) è un gruppo abeliano**, vale a dire:

$(1.a)$	$(a*b)*c = a*(b*c) \quad \forall a,b,c \in \mathrm{A}$	Proprietà associativa
$(1.b)$	$\forall a \in \mathrm{A}, \exists u \in \mathrm{A} / a*u = u*a = a$	Esistenza dell'elemento neutro u
$(1.c)$	$\forall a \in \mathrm{A}, \exists a' \in \mathrm{A} / a*a' = a'*a = u$	Esistenza del simmetrico a'
$(1.d)$	$a*b = b*a, \forall a,b \in \mathrm{A}$	Proprietà commutativa

In particolare qualora sia verificata solo la (1.a) la struttura A($*$) prende il nome di **semigruppo**, la (1.a) più la (1.b) di **monoide**, la (1.a), (1.b) e (1.c) di gruppo.

(2) **$\perp$ è doppiamente distributiva rispetto a $*$,** cioè:

$$a \perp (b * c) = (a \perp b) * (a \perp c)$$
$$(b * c) \perp a = (b \perp a) * (c \perp a)$$

(3) **A -{u} rispetto a $\perp$ è un gruppo abeliano**:

$(3.a)$	$a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c \quad \forall a,b,c \in \mathrm{A}$	Proprietà associativa
$(3.b)$	$a \perp u' = u' \perp a = a$	Esistenza di u', elemento neutro
$(3.c)$	$a \perp a' = a' \perp a = u'$	Esistenza del simmetrico a'
$(3.d)$	$a \perp b = b \perp a$	Proprietà commutativa

qualora non sia verificata la (3.d), la struttura A($*$, $\perp$), ritenendo verificate tutte le altre proprietà, prende il nome di **corpo.**

1.2 Definizione di Matrice.

Una **matrice M(m, n)** ,di tipo (m, n), è una tabella costituita da mn elementi appartenenti ad un campo, di solito R, disposti su m righe ed n colonne:

$$M_{(m,n)}^{(R)} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1j}\dots\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2j}\dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}\dots a_{mj}\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.3 Matrici particolari.

(1.3.a) Se $m \neq n$ la matrice si dice **rettangolare**, se $m = n$ la matrice si dice **quadrata,** il numero n delle sue righe (o colonne) si chiama l'ordine della matrice.

(1.3.b) Una matrice A(m, n) si dice **nulla** se tutti i suoi elementi sono nulli:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

(1.3.c) Data una matrice A(m, n) si definisce **matrice opposta** la matrice avente come elementi gli opposti degli elementi corrispondenti.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1j} \ldots . a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} a_{m3} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} - a_{12} - a_{13} \ldots - a_{1j} \ldots . - a_{1n} \\ -a_{21} - a_{22} - a_{23} \ldots - a_{2j} \ldots - a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ -a_{m1} - a_{m2} - a_{m3} \ldots - a_{mj} \ldots - a_{mn} \end{pmatrix}$$

(1.3.d) Si chiama vettore riga una matrice con un'unica riga, cioè del tipo (1, n).
Si chiama vettore colonna una matrice con un'unica colonna, cioè del tipo (m,1).

Una matrice quadrata, A(n, n), avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e i restanti nulli, si chiama **matrice unitaria** (o matrice identica) e viene indicata con I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 \;..\; 0 \;..\; 0 \;\ldots\; 0 \\ 0 \;..\; 1 \;..\; 0 \;\ldots\; 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ 0 \;..\; 0 \;..\; 0 \;\ldots\; 1 \end{pmatrix}$$

(1.3.e) Si definisce **matrice trasposta M^t** di una matrice M(m,n) la matrice che si ottiene dalla matrice assegnata scambiando le righe con le colonne.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots. \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad M^t = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\, a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\, a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

(1.3.f) Una matrice quadrata M, di ordine *n,* si dice **simmetrica** se sono uguali le coppie di elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale, cioè se:

$$a_{ik} = a_{ki} \text{ per } i,k = 1..n \text{ ed } i \neq k$$

In modo del tutto equivalente, una matrice M si dice simmetrica se: $\mathrm{M} = \mathrm{M}^t$.

(1.3.h) Fra le matrici quadrate di ordine n rivestono notevole interesse, per ciò che concerne le applicazioni, le **matrici triangolari superiori (inferiori)** in cui tutti gli elementi che si trovano "sotto" ("sopra") la diagonale principale sono nulli, mentre gli altri elementi possono essere qualunque, e le **matrici diagonali** in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono diversi da zero, mentre sono nulli tutti gli altri.

1.4 Addizione tra matrici.

Definiamo matrice somma di due matrici di tipo (m, n) su R:

$$A = (a_{ij}) \text{ e } B = (b_{ij}) \text{ con } i = 1..m,\ j = 1..n$$

la matrice che ha come elementi la somma degli elementi che occupano la stessa posizione nelle matrici addendi; cioè:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij}) \qquad \begin{cases} i = 1..m \\ j = 1..n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21}b_{22}\ldots\ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}b_{m2}\ldots b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}\ldots\ldots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}\ldots\ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}c_{m2}\ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

(1.5) Prodotto di uno scalare per una matrice.

Data una matrice A(m, n) e $k \varepsilon$R, si definisce prodotto di uno scalare k per una matrice A, la matrice che si ottiene moltiplicando k per tutti gli elementi di A.

$$k \cdot (a_{ij}) = (ka_{ij}) \qquad \begin{cases} i = 1..m \\ j = 1..n \end{cases}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11}ka_{12}\ldots ka_{1n} \\ ka_{21}ka_{22}\ldots ka_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ka_{m1}ka_{m2}\ldots ka_{mn} \end{pmatrix}$$

L'insieme $M^{(m\times n)}$ dotato di addizione, cioè la struttura $(M^{(m\times n)},+)$, è un **gruppo abeliano.**

1.5 Prodotto righe per colonne.

Consideriamo due matrici, M_1 ed M_2, ad elementi nel campo reale; se il numero delle colonne della prima matrice è eguale al numero di righe della seconda si può moltiplicare ogni riga della prima matrice per ogni colonna della seconda, ottenendo ancora una matrice che ha le righe della prima e le colonne delle seconda. Date le matrici:

$$M_1(m,n) \quad \text{ed} \quad M_2(n,p)$$

eseguiamo la **moltiplicazione righe per colonne.** Esplicitando le matrici,

$$M_1 = (a_{ij})\begin{cases} i = 1...m \\ j = 1..n \end{cases} \qquad \text{si ha:} \qquad M_1 \cdot M_2 = M_3 = (c_{ik})\begin{cases} i = 1..m \\ k = 1..p \end{cases}$$

$$M_2 = (b_{hk})\begin{cases} h = 1..n \\ k = 1..p \end{cases}$$

$$\text{dove} \quad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}b_{jk}$$

cioè, c_{ik} è la somma dei prodotti degli elementi della ì – esima riga di M_1 per gli elementi della k–esima colonna di M_2.

La struttura $\left(M^{(n\times n)},+,\cdot\right)$ è un **anello unitario** non commutativo, perché:

- È gruppo abeliano rispetto all'addizione;
- La moltiplicazione è associativa;
- La moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione;
- La moltiplicazione ammette l'elemento neutro (matrice unitaria).
- La moltiplicazione non è, però, commutativa perché non sempre da AxB si può passare a BxA e , se anche fosse, solo di rado risulterebbe (matrici permutabili) verificata l'uguaglianza.

1.6 Inversa di una matrice.

Assegnata una matrice *A(m,n) diremo che* essa è invertibile se è quadrata, cioè *m = n*, e se il suo determinante det(A) (paragrafo successivo) è diverso da zero. In tal caso esiste A^{-1}, inversa di A tale che: $A^{-1} \bullet A = A \bullet A^{-1} = I$, dove *I* è la matrice unitaria*.* Se essa esiste è unica. Un matrice priva di inversa si dice **singolare**. Denotando con A* la matrice **aggiunta** (trasposta della matrice dei complementi algebrici di A) A^{-1} si ottiene mediante la formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \bullet A^{*}$$

2.1 Definizione di determinante.

Assegnati **n** oggetti, di natura qualsiasi, si dicono **permutazioni semplici di classe n** tutti i raggruppamenti che si ottengono prendendo, ogni volta, gli **n** oggetti, sicchè due di essi possono differire solo per l'ordine degli elementi. Consideriamo l'insieme degli indici:

$$N = \left\{ 1, 2, 3, \ldots\ldots, n \right\}$$

costituito dai numeri naturali escluso lo zero. **Il numero di permutazioni di classe n** che si possono formare con gli **n** elementi dati **è il fattoriale di n**; quindi: $\mathbf{P_n = n!}$ **n!** è il prodotto dei primi n numeri naturali: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
Vale la proprietà: $(n+1)! = (n+1)n!$ per cui: $1! = 1 \cdot 0!$ ma $1! = 1$ e perciò $0! = 1$.
Le permutazioni nell'insieme N sono le funzioni invertibili di N in N. Ad esempio, all'insieme {1, 2 } sono associate due permutazioni:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ permutazione identica, lascia 1→1 e 2→2,0 scambi⇒ classe pari

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ porta 1→2 e 2→1, 1inversione ⇒ classe dispari

Se in una permutazione **non vi è alcuna inversione** di ordine rispetto a quello naturale si dice che **la permutazione è di classe pari** (la stessa cosa vale se il numero di inversioni è pari), mentre se **vi è una inversione** si dice che **la permutazione è di classe dispari** (stesso discorso se le inversioni sono in numero dispari).
Le permutazioni di classe pari, **cicli**, sono positive; quelle di classe dispari, **trasposizioni**, sono negative. Le prime sono, in numero, sempre uguali alle seconde.

Consideriamo l'insieme $\left\{1, 2, 3\right\}$; le permutazioni sono $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, vediamole:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ lascia fisso 1 e scambia 2→3 ; 1 inversione ⇒ classe dispari.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ lascia fisso 3 e scambia 1→2; 1 inversione ⇒ classe dispari.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ lascia fisso 2 e scambia 1→3; 3 inversioni ⇒ classe dispari.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ lascia fissi i tre indici ; vi sono 0 inversioni ⇒ classe pari.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ porta 1→2, 2 →3, 3 →1; 2 inversioni ⇒ classe pari.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ porta 3 →1, 1 → 2 , 2 → 3 ; 2 inversioni ⇒ classe pari.

Fissato un campo K ed assegnata una matrice A , quadrata di ordine n con elementi in K, definiamo determinante di A, det(A), la somma dei termini (prodotti) relativi alle **n** fattoriali permutazioni dell'insieme N = {1,2,3,…,n }, prese con il segno più se di classe pari con il segno meno se di classe dispari. Se f è una permutazione di N allora, si può scrivere:

$$|A| = \det(A) = \sum_f a_f$$

Det(A) è uno scalare e si può anche definire come una funzione dall'insieme $K^{(n\,xn)}$ delle matrici quadrate di ordine n, nell'insieme R dei numeri reali :

$$\det : K^{(n\,xn)} \longrightarrow R$$

$$A(n,n) \longrightarrow \det(A)\varepsilon\ R$$

2.2 Calcolo di determinanti.

Eseguiamo il calcolo del determinante di una matrice A ,quadrata di ordine n = 2:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

Poiché all'insieme degli indici $I = \{1,2\}$ sono associate 2! = 2 permutazioni, di cui una di classe pari e una dispari , il valore del determinante è dato dalla somma dei termini, ad esse relativi, che si ottengono moltiplicando in diagonale.
Si spiega, con questo esempio, la nota "regola mnemonica" secondo la quale gli studenti sanno che si deve cambiare di segno quando si moltiplica lungo la diagonale secondaria, ma non sanno il perché. Calcoliamo, adesso, il determinante della matrice A = (a_{ij}) i, j = 1..3, quadrata di ordine n = 3:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Poiché all'insieme degli indici {1,2,3} corrispondono 3! = 6 permutazioni ,di cui 3 di classe pari e tre di classe dispari, la somma dei termini ad esse relativi dà il numero reale associato al determinante. Riscrivendo le prime due colonne dopo la terza e moltiplicando in diagonale (**regola di Sarrus**) troveremo le sei permutazioni già espresse nel precedente paragrafo, a ribadire la definizione di determinante di una matrice:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

2.3 Minore e complemento algebrico.

Si definisce **complemento algebrico (o cofattore) A_{rs} di un elemento a_{rs} (minore)** di una matrice A di tipo (n, n) **il determinante della matrice** ottenuta sopprimendo in quella data la r-esima riga e la s-esima colonna. Esso è preceduto dal segno più se r + s è pari, dal segno meno se r + s è dispari.

Si definisce **minore** di una matrice A (n ,n) **il determinante di ogni matrice quadrata estratta** da essa; il minore di ordine 1 è l'elemento; orlando questo minore con una riga ed una colonna si perviene ad un minore di ordine 2, poi di ordine 3 e cosi via, fino ad ottenere l'unico minore di ordine n coincidente con A(n, n).

2.4 Rango di una matrice.

Si definisce **rango p di una matrice A(m, n)** l'ordine massimo dei minori estratti diversi da zero e, tenendo conto che ogni matrice è composta da vettori riga e vettori colonna, il **rango** può essere definito, anche, come **il massimo numero di linee della matrice linearmente indipendenti.** Ricordiamo che il rango **p** di una matrice verifica la proprietà :

$$\mathbf{p \le Minimo(m, n).}$$

Teorema di Kronecher.

Una matrice A(m,n) ha rango $p = r$ se esiste un suo minore estratto di ordine *r, H(r, r),* diverso da zero e se tutti gli orlati di ordine *r+1, H(r+1,r+1),* sono uguali a zero.

Teorema di Laplace.

Il determinante di una matrice quadrata A, di ordine n, è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) qualsiasi della matrice per i rispettivi complementi algebrici.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}A_{rj} \quad \text{(riferito alla riga r-esima)} \qquad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{is} \quad \text{(riferito alla s-esima colonna)}$$

Se la matrice A è di ordine 1, ossia è costituita da un solo elemento A = (a_{11}), si pone per definizione det (A)= a_{11}, pertanto **il determinante** di una matrice quadrata di ordine 1 **è uguale al numero stesso**. Per calcolare il determinante di una matrice di ordine n con la regola di Laplace, si devono calcolare **n** determinanti di matrici di ordine n-1; a sua volta per calcolare un determinante di una matrice quadrata di ordine n-1, si devono calcolare n-1 determinanti di matrici di ordine n-2, e così via fino a giungere al calcolo di un determinante di una matrice di ordine 2. Per ridurre il calcolo, a volte molto laborioso, si applicano le proprietà dei determinanti. Eseguiamo il calcolo del determinante di n =3 per ritrovare le 3! permutazioni anche con La Place:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

2.5 Proprietà dei determinanti.

(a) Se una matrice quadrata ha una linea di tutti zero, il suo determinante è zero. **(b)** Se in una matrice quadrata vi sono due linee uguali o proporzionali, il determinante è zero.
(c) Se in una matrice quadrata si sostituisce una linea con la somma di questa con il prodotto di un scalare *k* per una linea ad essa parallela, il determinante non cambia.

3.1 Sistemi lineari.

Assegnata una matrice A di tipo (m, n) sul campo R dei reali, un vettore colonna X di tipo (n, 1) ed un vettore colonna B di tipo (m, 1), eseguendo il prodotto righe per colonne A·X ed eguagliando a B, otteniamo un **sistema** di **m equazioni** in **n incognite ($x_1, x_2, . . . , x_n$) lineare e non omogeneo**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se il vettore B coincide con il vettore nullo $\underline{0}$ allora il **sistema si dice lineare omogeneo** in quanto tutti i suoi termini sono di primo grado.
Si dice soluzione del sistema ogni n–pla ($x_1, x_2, . . . , x_n$) di scalari di R, che soddisfa le sue equazioni. In particolare, se esso è omogeneo, la n–pla di tutti zero **(0,0, …,0)** è una sua **soluzione.**
Un sistema lineare è **compatibile** se ammette almeno una soluzione, in caso contrario si dice **incompatibile**. **Il sistema lineare omogeneo è sempre compatibile.**
Ad ogni sistema lineare sono associate due **matrici**: quella **incompleta o dei coefficienti delle incognite A e quella completa A' ottenuta aggiungendo ad A la colonna dei termini noti.** Nel sistema omogeneo esse coincidono.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Indicati con **p il rango di A**, con **p' quello di A'**, con **m il numero di equazioni ed n il numero di incognite del sistema,** si ha il teorema di:
<u>Rouchè–Capelli</u> il quale afferma che: condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di **m** equazioni in **n** incognite sia compatibile è che il rango di A sia uguale a quello di A'; in particolare se : **p = p' = m = n** esso ammette un'unica soluzione (**<u>teorema di Kramer</u>**). Se **p = p' = m < n** il sistema ammette ∞^{n-m} soluzioni. Se **p = p' = m' = n,** con **m'<m,** si devono eliminare **m - m'** equazioni, che dipendono dalle rimanenti, e la soluzione è unica. Se **p = p' = m' < n,** con **m'<m,** eliminate **m - m'** equazioni incognite, il sistema ammette $\infty^{n-m'}$ soluzioni**.** Se **p ≠ p'** il sistema è **incompatibile** e non ammette alcuna soluzione.
Se il sistema dato è **lineare omogeneo** e **p = p' = m = n** affinchè esso abbia un'unica soluzione, quella nulla **(0,0, …,0)**, è necessario che il det(A) sia ≠ 0.

<u>ESERCIZIO 1</u>. Determinare per quali valori di k la matrice A è invertibile, stabilire senza calcolare l'inversa di A, se per k = 1, l'inversa di A risulta B.

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & -1 & k \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ calcoliamo } \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2-k^2 & -1 & k \\ -2-2k & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Applicando la proprietà (c) dei determinanti, mi creo uno zero in $a_{11,}$ prima riga, e risolvo con La Place: $-(2 + 2k) + (-2 + k^2) = 0 \Rightarrow -2 -2k-2 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 4 = 0 \Rightarrow k \neq 1 \pm \sqrt{5}$ è invertibile. Pertanto per k = 1, B non è l'inversa di A come risulta dalla verifica, applicando il prodotto righe per colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>ESERCIZIO 2</u>. Studiare, al variare del parametro reale k, il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & k & 2k+1 \\ 2k+3 & 2k+2 & 3k+3 \\ 0 & -k & -k \end{pmatrix} \text{ moltiplicando la terza colonna per -1 e sommando con la seconda si ha: } \begin{vmatrix} k+1 & -k-1 & 2k+1 \\ 2k+3 & -k-1 & 3k+3 \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix} =$$

$$k \bullet \begin{vmatrix} k+1 & k+1 \\ 2k+3 & k+1 \end{vmatrix} = k\,[\,-(k+1)(2k+3) + (k+1)^2] = k[(k+1)(-k-2)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -1 \\ k = -2 \end{cases}$$

Per k≠ 0, -1, -2 rango 3, per k = 0, -1, -2 rango massimo 2. Verifichiamolo:

$$k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p = 2;\ k = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p = 2; \text{ per } k = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow p = 2$$

Nel primo caso il determinante è zero, perché vi è una riga nulla. Nel secondo caso perché vi sono due righe proporzionali. Nel terzo caso perché vi sono due righe uguali

<u>ESERCIZIO 3</u>. Dire per quali valori di k la matrice A è invertibile e trovarne l'inversa per k = 3. Verificare che $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2k & 1 \\ 0 & -k & k \\ 2 & 2 & k+1 \end{pmatrix} \text{ moltiplicando la } 1^a \text{ riga per } -k \text{ e sommandola alla } 2^a\text{, poi la } 1^a \text{ per } -k-1 \text{ e sommandola alla } 3^a\text{: } \begin{vmatrix} 3 & 2k & 1 \\ -3k & -k-2k^2 & 0 \\ -3k-1 & -2k^2-2k+2 & 0 \end{vmatrix} = -(3k+1)(k+2k^2) -3k(-2k^2-2k+2) =$$

$k^2-7k = 0 \Rightarrow (k = 0 \text{ e } k = 1/7)$ quindi per $k \neq 0,\ 1/7$ la matrice è invertibile. Per k = 3 diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante, creando due zeri nella } 3^a \text{ colonna, è } \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -9 & -21 & 0 \\ -10 & -22 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Calcoliamo i complementi algebrici: $A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -18$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -22$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 21$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -9$

$$A^* = \begin{pmatrix} -18 & -22 & 21 \\ 6 & 10 & -9 \\ 6 & 6 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{12} A^* = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/6 & -7/4 \\ -1/2 & -5/6 & 3/4 \\ -1/2 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$ Proviamo che $A^{-1} \bullet A = I$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 11/6 & -7/4 \\ -1/2 & -5/6 & 3/4 \\ -1/2 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 11/6 & -5/6 & -1/2 \\ -7/4 & 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Poiché il det(A) coincide con il $\det(A^T)$ risulta: $\det(A^T) = -12$; i complementi algebrici di A^T sono dati dalle righe di A^* per cui, facendo la trasposta, si ottiene $(A^T)^*$. Allora sarà:

$$(A^T)^{-1} = \frac{-1}{12} \bullet (A^T)^* = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -18 & 6 & 6 \\ -22 & 10 & 6 \\ 21 & -9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 11/6 & -5/6 & -1/2 \\ -7/4 & 3/4 & 3/4 \end{pmatrix} = (A^{-1})^T.$$

<u>ESERCIZIO 4</u>. Determinare per quail valori di k il sistema ammette ∞^1 soluzioni, nessuna soluzione.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$ scriviamo le matrici: $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ k \\ 0 \end{matrix}$ essendo di tipo (3,3) e (3,4) il rango può essere al massimo 3 e ciò avverrà per tutti i k per cui il determinante della prima matrice è diverso da zero. Calcoliamolo: $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 \\ 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(k+1)^2 + 2(k+1) = (k+1)(1-k) = 0$ se $k = \pm 1$.

Allora per $k \neq \pm 1$ il sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione, in quanto p = p'= m = n. Per determinarla, basta eliminare la z tra la prima e la terza equazione e tra la seconda e la terza equazione.

Risolvendo il sistema: $\begin{cases} (k+1)x = 1 \\ 2x + (k-1)y = k \end{cases}$ si ha: $x = \frac{1}{k+1}$; $y = \frac{k+2}{k+1}$; $z = \frac{-k-1}{k+1} = -1$

Per k =1 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ ⇒ rango p = p' = 2 = m < n, essendo il minore $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, esso ammette ∞^1 soluzioni del tipo (½, ½ - h, h). Per k = -1 si ha: $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, essendo il minore $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, ma $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ha rango 3

e, pertanto, essendo p ≠ p', il sistema è incompatibile e non ammette alcuna soluzione. Il minore di terzo ordine precedente è stato ottenuto orlando quello di ordine 2 con la 3^a riga e la 4^a colonna.

<u>ESERCIZIO 5</u>. Stabilire per quali valori di k reale il sistema ammette ∞^2 soluzioni.

$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x + ky + (k+1)z = 1 \\ kx + 2ky + kz = 0 \end{cases}$ scriviamo le matrici: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & k & k+1 \\ k & 2k & k \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\Bigg)$ essendo di tipo (3,3) e (3,4) le due

matrici del sistema, il rango può essere al più 3; calcolando il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite (mi creo due zeri nella 2^a colonna moltiplicando la 3^a per -2 e sommando ad essa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -k-2 & k+1 \\ k & 0 & k \end{vmatrix} = -(k+2)\bullet 0 = 0\ \forall\ k, \text{ quindi il rango sarà massimo 2.}$$

Se $k \neq -2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & k \end{vmatrix} \neq 0$ ci dice che il rango p = 2. Orlando il minore precedente con la 4^a colonna, si

ottiene: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ k & 2k & 0 \end{vmatrix}$ moltiplicando la 1^a colonna per -2 e sommando con la 2^a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & k+2 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} = (k+2)(-k) = 0$ se k = 0, k = -2.

Per k ≠0 e da -2 il rango della matrice completa è 3 ed il sistema è incompatibile. (nessuna soluz.)

Per k = -2 si ha: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ e rango p =1 poiché le prime due righe sono proporzionali alla 3^a e vanno eliminate.

La matrice ottenuta con la colonna dei termini noti : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ ha rango 2, essendo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$,

ed il sistema è incompatibile. Per k = 0 si ha la terza riga di tutti zero, quindi p = p' = 2 ed il sistema ammette ∞^1 soluzioni. Quindi non vi sono valori di k reale per cui il sistema ha ∞^2 soluzioni. Infatti

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\Big)$ sono le matrici del sistema di tipo (2,3) e (2,4). Affinchè il loro rango sia 1, ciò comporterebbe ∞^2 soluzioni, dovendo fissare due incognite, i due vettori riga dovrebbero avere le componenti proporzionali, cosa non vera.

<u>ESERCIZIO 6</u>. Data la matrice A e i vettori colonna X e B, si dica per quale valore di k reale A è invertibile e per quali valori di k il sistema A•X = B è compatibile o incompatibile, trovare le soluzioni.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k^2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Moltiplico la 1ª colonna per -2 e sommo alla 3ª: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k^2 & k & 1-2k^2 \\ 1 & 1 & k-2 \end{vmatrix} = -1+2k^2+k^2-2k = 3k^2-2k-1 = 0$

che dà k = 1, -1/3. Perciò per $k \neq 1, -1/3$ la matrice A è invertibile, il sistema è compatibile, essendo p = p'= m = n =3, ed ammette un'unica soluzione. Per determinarla risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x \qquad\quad + 2z = 2 \\ k^2x + ky + z = 3 \\ x + y + kz = 3 \end{cases} \text{ abbino 2ª e 3ª ed elimino y: } \left\{ \begin{array}{lllll} k^2x & + ky & + z & & = 3 \\ -kx & - ky & - k^2z & & = -3k \\ \hline -kx(1-k) & 0 & z(1-k)(1+k) & & = 3(1-k) \end{array} \right.$$

Elimino 1-k, abbino il risultato alla 1ª equazione ed elimino x, moltiplicando la 2ª equazione per k:

$$\left\{ \begin{array}{lll} -kx & + (1+k)z & = 3 \\ kx & + 2kz & = 2k \\ \hline 0 & (1+3k)z & = 3 + 2k \end{array} \right. \qquad \text{segue che } z = \frac{3+2k}{1+3k}; \quad x = \frac{-4+2k}{1+3k}; \quad y = \frac{-2k^2+4k+7}{1+3k}$$

Per k = 1 $\begin{cases} x \qquad\quad + 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ elimino la 3ª riga e trovo: $\begin{cases} x \qquad\quad + 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ essendo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

risulta p = p'=2 < 3 che implica ∞^1 soluzioni, fisso y = k in quanto il minore estratto non riguarda la y e risolvendo trovo la soluzione (4-2k, k, k-1).

Per k = -1/3 $\begin{cases} x \qquad\quad + 2z = 2 \\ x - 3y + 9z = 27 \\ 3x + 3y - z = 9 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 9 & 27 \\ 3 & 3 & -1 & 9 \end{array} \right)$ sono matrici di tipo (3,3) e (3,4)

Poichè: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 9 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 7 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p = 2$ ma $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 27 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 25 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow p' = 3$

Per il teorema di Rouchè-Capelli, $p \neq p'$, il sistema è incompatibile.

<u>ESERCIZIO 7</u>. Dire per quali valori di k reale la matrice A è invertibile.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & k & 2k \end{pmatrix} \Rightarrow$ moltiplico la 2ª riga per -2 e sommo con la 1ª: $\begin{vmatrix} 0 & 3-2k & k-2 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & k & 2k \end{vmatrix} \Rightarrow$

$-\begin{vmatrix} 3-2k & k-2 \\ k & 2k \end{vmatrix} = k(k-2) - 2k(3-2k) = 5k^2 - 8k = 0 \Rightarrow k = 0$ e $k = 8/5$, quindi per $k \neq 0, 8/5$ la matrice è invertibile. Per k = 0 il suo determinante è zero (terza riga nulla).

Per k = 8/5 risulta che la matrice ha due righe proporzionali e il suo determinante è zero.