Vincenzo Aieta

CONICHE, FASCI DI CONICHE

Teoria delle Coniche

Il nome “ *conica”* deriva dal semplice fatto che gli antichi Greci secando con un *piano una conica a doppia falda* ottenevano, a seconda dell’ampiezza dell’angolo che detto piano formava con l’asse rispetto all’angolo di semiapertura del cono, una ellisse, una iperbole, una parabola, una circonferenza, una coppia di rette, parallele o incidenti, reali o immaginarie, un punto.

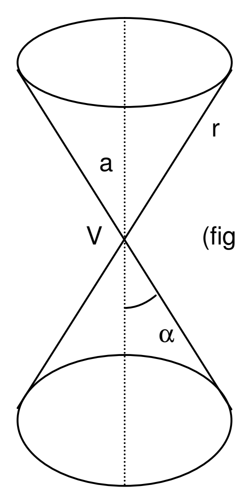
Sia **a** una retta del piano xy, detta *asse*, ed **r** una retta complanare con **a** e ad essa incidente in un punto **V**. Facendo ruotare **r**, *generatrice*, di un giro completo attorno ad **a** si ottiene una superficie, detta *superficie conica a doppia falda* (fig.1), formata da due coni contrapposti nel vertice. L’angolo α, formato dalle rette **r** ed **a**, si dice *angolo di apertura* della superficie conica.

Definiamo conica l’insieme dei punti che soddisfano un’equazione, a coefficienti reali, di secondo grado in due variabili, oppure, l’insieme degli zeri (1) reali di un polinomio P(x,y) di secondo grado a coefficienti reali in due variabili.

$$\mathbf{a_{11}x^2 + a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33} = 0}$$

Al polinomio al primo membro possiamo associare due matrici simmetriche ($a_{ik} = a_{ki}$) che chiameremo A e B**; A è la matrice completa** di P(x,y), **B è la matrice quadratica** costituita dai coefficienti dei termini di secondo grado del polinomio P(x,y) e della quale A è la matrice orlata di ordine 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}$$



(fig.1)

Se il polinomio P(x, y) è irriducibile in R (in C), l’equazione P(x, y) = 0 non ha soluzioni in R (in C), l’insieme degli zeri di P(x,y) è l’insieme vuoto, **la conica è non degenere altrimenti è degenere**. Dire che **P(x, y)** è *irriducibile* equivale a dire che il determinante della matrice A è diverso da zero (rango di A uguale a 3) e, analogamente, dire che P(x, y) è riducibile significa che il determinante della matrice A è zero (rango di A uguale a 2 oppure a 1).

(1) Si dicono zeri di un polinomio Q(x), a coefficienti in R , le soluzioni in R della

equazione associata $Q(x) = 0$, ad esempio: $x^2 + 1$ non è riducibile in R ma in C, mentre x^2-1 è riducibile in R. Infatti l'equazione $x^2 + 1 = 0$ che equivale a $(x + i)\cdot(x - i) = 0$ ha come zeri $\pm i$ al contrario dell'equazione $x^2-1 = 0$ che equivale a $(x + 1)(x - 1) = 0$ che ha come zeri i numeri reali ± 1.
Poiché $x + 1$ ed $x - 1$ sono fattori di primo grado, $+1$ e -1 si dicono zeri semplici o zeri di molteplicità 1; in tal caso il polinomio, oltre che riducibile è anche separabile.
Il polinomio $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$ non è riducibile in R ma in C e separabile perché tutti i suoi zeri sono semplici: $x^4 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x + i)(x - i)$.

Classificazione di una conica

Rango di A	**Tipo di Conica**	**Autovalori** λ_1, λ_2	**Det(B)**	**Det (A)**	**Conica**
Rank (A) = 3	Non Degenere	Concordi	$\|B\| > 0$	$\|A\| > 0$	Ellisse a punti immaginari
				$\|A\| < 0$	Ellisse a punti reali
	Non Degenere	Discordi	$\|B\| < 0$	$\|A\| \neq 0$	Iperbole reale
	Non Degenere	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 \neq 0$	$\|B\| = 0$	$\|A\| \neq 0$	Parabola reale
	Non Degenere	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\|B\| > 0$	$\|A\| > 0$	Circonferenza Immaginaria
				$\|A\| < 0$	Circonferenza reale
Rank (A) = 2	Degenere	Concordi	$\|B\| > 0$	$\|A\| = 0$	Coppia di rette complesse e coniugate non parallele
	Degenere	Discordi	$\|B\| < 0$	$\|A\| = 0$	Coppia di rette reali e distinte non parallele
	Degenere	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	$\|B\| = 0$	$\|A\| = 0$	Coppia di rette parallele e distinte reali o complesse
Rank (A) = 1	Degenere	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	$\|B\| = 0$	$\|A\| = 0$	Coppia di rette reali parallele e coincidenti

Autovalori – Autovettori – Autospazi

Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione **n** sul campo **R** degli scalari ed **E** una sua base. Assegnata una matrice quadrata **A** di ordine n su R, **un elemento λ εR si dice autovalore di A se e solo se risulta**:

$$|(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})| = \mathbf{0} \qquad (1)$$

in altre parole: **se λ è soluzione dell'equazione (1),** dove **I** indica la matrice unitaria di ordine n. Il polinomio al primo membro della (1) si chiama **polinomio caratteristico di A; ogni vettore $\underline{x}$ εV, diverso dal vettore nullo, si dice autovettore di A se è soluzione del sistema lineare omogeneo:**

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \qquad (2)$$

più precisamente si parla di **$\underline{x}$** come di autovettore di autovalore λ. Per quanto detto ogni scalare λ ε R che determina soluzioni non nulle della (2) è un autovalore di A corrispondente ad **$\underline{x}$.**
Se **$\underline{x}$** è un autovettore di autovalore λ, anche **k$\underline{x}$** lo è **; l'insieme degli autovettori di autovalore λ della matrice A e del vettore nullo formano un sottospazio vettoriale di V che prende il nome di autospazio di λ .**

<u>ESEMPIO1</u>. Sia A una matrice di ordine 3 sui reali, si determinino i suoi autovalori, autovettori, autospazi.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = -1$$

sono gli autovalori di A.

Eseguiamo ora il prodotto righe per colonne ed eguagliando a zero avremo:

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \begin{cases} (-1-\lambda)x + y + 2z = 0 \\ (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ (2-\lambda)z = 0 \end{cases} \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = 0 \end{cases}$$

che fornisce **le soluzioni**, autovettori di autovalore 1, k(1,2,0) che **individuano un autospazio di dimensione 1**(dimensione di V meno il numero delle equazioni del sistema) cioè una retta intersezione dei due piani: z = 0 ed y -2x = 0 generata, ad esempio, dal vettore (1,2,0) base dell'autospazio.

$$\lambda = 2 \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ z \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4k}{3} & \text{soluzioni } k\,(4, 6, 3) \\ & \text{autospazio = retta} \\ y = 2k & \text{generata dal} \\ z = k & \text{vettore}(4, 6, 3)\,. \end{cases} \qquad \lambda = -1 \begin{cases} y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = k & \text{le soluzioni sono} \\ y = 0 & \text{gli autovettori di} \\ z = 0 & \lambda = -1 \text{ dati da} \\ & k\,(1, 0, 0) \text{ al} \end{cases}$$

variare di k; esse individuano un autospazio di dimensione 1,asse delle x, sottospazio di V_3 di cui (1, 0, 0) è una base.

<u>ESEMPIO 2</u>. Determinare autovalori, autovettori , autospazi e basi della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\text{Autovalori}} \\ \lambda = 1; \lambda = -1; \\ \text{(molteplicità 2,1)} \end{cases}$$

$$|A - \lambda I| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda x + z = 0 \\ (1-\lambda) y = 0 \\ x - \lambda z = 0 \end{cases} \text{ per } \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = z & \text{per } z = k \text{ ed } y = h \text{ si hanno le soluzioni} \\ y \cdot 0 = 0 & (k, h, k) = k\,(1, 0, 1) + h(0, 1, 0) \text{ che al} \\ x = z & \text{variare di h e k forniscono tutti gli} \end{cases}$$

autovettori di $\lambda = 1$. Il piano x-z = 0, passante per l'asse y, è l'autospazio individuato da essi ed una sua base è data dai vettori (1, 0, 1) e (0, 1, 0) come si può verificare. Difatti essi sono linearmente indipendenti perché il sistema : $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ dà soltanto la soluzione nulla (0,0) e, chiaramente, formano un sistema di generatori dell'autospazio in quanto da:
$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0) = (a, b, c)$ si ottiene la soluzione: $\lambda_1 = a = c$, $\lambda_2 = b$, quindi ogni vettore (a, b, c) del sottospazio si può esprimere come combinazione lineare di (1, 0, 1) e (0, 1, 0).

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -k & \text{gli autovettori di } \lambda = -1 \text{ sono dati, al variare di k, da } k\,(-1, 0, 1) \text{ ed} \\ y = 0 & \text{individuano una retta generata, ad esempio, dal vettore } (-1, 0, 1)\,. \\ z = k & \text{Essa è l'intersezione del piano xz con il piano per l'asse y : } x + z = 0 \end{cases}$$

Rappresentazione di una conica non degenere

Sia det(A) ≠ 0. Detti λ_1 e λ_2 gli autovalori della matrice B, qualora sia det(B) ≠ 0, essi saranno entrambi diversi da zero, positivi o negativi nel caso dell'ellisse, di segno opposto nel caso dell'iperbole, uguali in presenza di una circonferenza; qualora, invece, sia det(B) = 0, un autovalore sarà uguale a zero ma l'altro sarà diverso da zero e si tratterà di una parabola.

Forma canonica di una conica Γ

<u>Ellisse –Iperbole</u>	**<u>Parabola</u>**
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$	se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 x^2 = 2cy \quad c = \pm\sqrt{\dfrac{-\det(A)}{\lambda_1}}$
$c = \dfrac{-\det(A)}{\det(B)}$	se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 y^2 = 2cx \quad c = \pm\sqrt{\dfrac{-\det(A)}{\lambda_2}}$

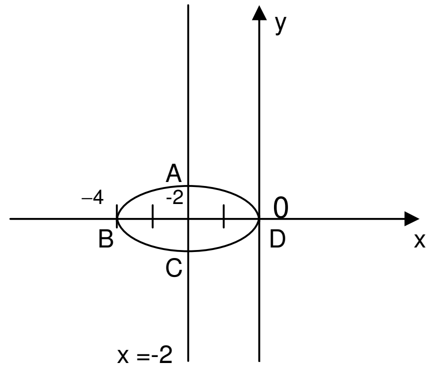
<u>ESEMPIO 1.</u> Classificare la conica di equazione: $\mathbf{x^2 + 2y^2 + 4x = 0}$, determinare i suoi elementi caratteristici e rappresentarla.

La mancanza del termine rettangolare xy significa che la conica è riferita ad un sistema di assi con origine diversa da (0, 0), non ruotato rispetto ad Oxy ma solo traslato, per la presenza del termine di primo grado in x, nella direzione dell'asse x. Lo studio della conica si può eseguire senza ricorrere al metodo generale. Infatti, completando i quadrati, si ha:

$(x + 2)^2 + 2y^2 = 4$; posto $x + 2 = X$; $y = Y$; si ricava $\dfrac{X^2}{1} + \dfrac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow \dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{2} = 1$

dalle equazioni della traslazione : $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$ si ricava il centro O'(–2,0), i semiassi sono a = 2 e b = $\sqrt{2}$,

gli assi sono le rette x = – 2, y = 0; i vertici, che si ricavano intersecando la conica con gli assi, sono i punti (-4, 0), (0,0), $(0, \sqrt{-2})$, $(0, \sqrt{+2})$; i fuochi $(\pm\sqrt{2}, 0)$; $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$



Metodo generale: Determiniamo det(A) e det(B):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 < 0; \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow$$ Conica non degenere, ellisse a punti reali.

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2;$$ autovalori

V_1 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0$ (autospazio di λ_1) V_2 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0$ (autospazio di λ_2)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y = 0 \Rightarrow y = 0$; Centro (-2, 0) La generica retta parallela a V_1 è: $y + k = 0$, imponendo il passaggio per il centro, trovo il primo asse, analogamente partendo da $x + h = 0$ troverò il secondo asse. $y + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow y = 0$ (primo asse); $x + h = 0 \Rightarrow h = 2 \Rightarrow x = -2$ (secondo asse)

FORMA CANONICA: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$

$$c = \frac{-\det(A)}{\det(B)} = 4 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

ESEMPIO 2. Classificare la conica di equazione : $\mathbf{x^2 + xy + y^2 - 1 = 0}$ e rappresentarla dopo averne determinato gli elementi necessari.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -(1 - \frac{1}{4}) = -\frac{3}{4} < 0$$ Conica non degenere

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$$ ELLISSE REALE $$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

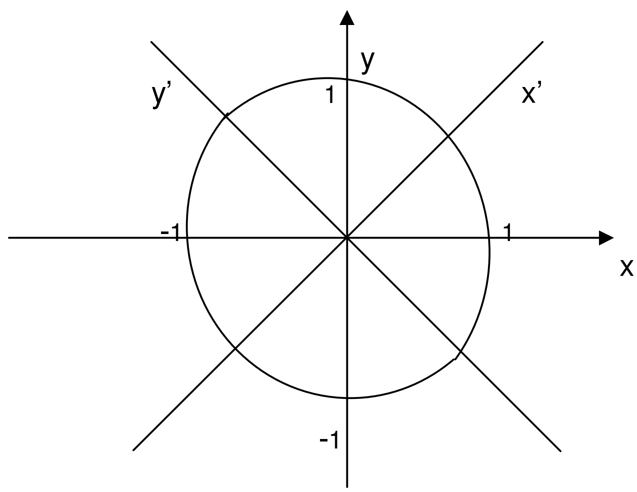
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$

$4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}; \lambda_2 = \frac{1}{2};$ CENTRO:C(0, 0).

$$V_{\frac{1}{2}} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 0 \; ; \quad V_{\frac{3}{2}} : \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow - x + y = 0 \; ;$$

<u>Primo Asse</u>: $x + y + k = 0 \Rightarrow k = 0$; $x + y = 0$; <u>Secondo asse</u>: $-x + y + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow -x + y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$; $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$; (Intersezioni con gli assi)



<u>Forma Canonica</u> : $\frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y^2}{2} = 1$; $\quad c = \frac{-\det(A)}{\det(B)} = 1$

<u>ESEMPIO 3</u>. Classificare la conica di equazione: $\mathbf{x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0}$, determinare eventuali assi, asintoti, vertice o centro, e disegnarla.

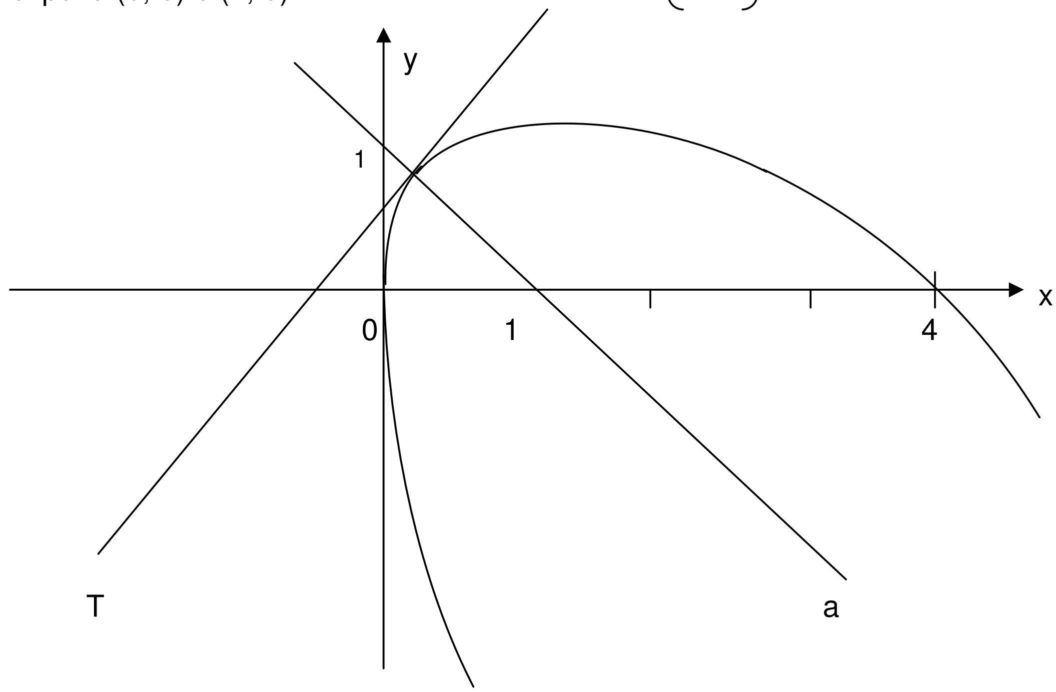
La presenza del quadrato $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, la forma quadratica è un quadrato perfetto, ci assicura che $\det(B) = 0$, pertanto , nell'ipotesi $\det(A) \neq 0$, la conica non può che essere una parabola. Praticamente basta constatare che i termini di secondo grado formino un quadrato perfetto e che compaia almeno un termine di primo grado; nel caso che , come vedremo appresso, questi ultimi siano assenti avremo una coppia di rette parallele distinte o coincidenti, complesse coniugate o reali.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \; ; \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \underline{\text{Parabola}}$$

<u>Separiamo il quadrato</u>: $(x + y)^2 = 4x$ (1) consideriamo la generica parallela alla retta $x + y = 0$, sia $x + y + k = 0$, sostituendo nella (1) si ha: $(x + y + k)^2 = k^2 + 2kx + 2ky + 4x \Rightarrow$ $(x + y + k)^2 = 2(k + 2)x + 2ky + k^2$ e imponendo che le rette $x + y + k = 0$ e $2(k+2)x + 2ky + k^2 = 0$ siano perpendicolari : $2(k + 2) + 2k = 0$ otterremo $k = -1$ per cui esse diventano:

$x + y - 1 = 0$ (asse della parabola) $\qquad$ $2x - 2y + 1 = 0$ (tangente nel vertice)

il vertice, punto d'incontro delle due rette, ha le coordinate $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, la parabola interseca l'asse x nei punti (0, 0) e (4, 0).



<u>Altro procedimento</u>

$$\mathrm{Det}(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 2;$$

per $\lambda_1 = 0$ si ha l'autospazio : $x + y = 0$ (retta) di cui $x + y + k = 0$ è una parallela; per $\lambda_2 = 2$ si ricava l'autospazio $-x+y = 0$(retta) di cui $-x+y+k = 0$ è una parallela. Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -x + y + k = 0 \\ (x+y)^2 = 4x \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - k \\ (x + x - k)^2 - 4x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 - 4(k+1)x + k^2 = 0 \quad (1) \\ \Delta = 0 \Rightarrow k = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \text{ (tangente)} \\ \text{dalla (1) per } k = \frac{-1}{2} \\ \text{si ha } \ 16x^2 - 8x + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui il vertice V $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. L'asse si trova da $x + y + k = 0$ sostituendovi le coordinate del vertice e ha equazione : $x + y - 1 = 0$. Una forma canonica, essendo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, è data da: $\lambda_2 y^2 = \pm 2cx \Rightarrow 2y^2 = \pm 2\sqrt{2}\, x \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} y^2$ rispetto a Vx'y'; $c = \pm\sqrt{\frac{4}{2}} = \pm\sqrt{2}$

Rappresentazione di una conica degenere

ESEMPIO 1. Classificare la conica di equazione : $\mathbf{y^2 + 4y - 2 = 0}$, determinare gli elementi caratteristici e rappresentarla.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \qquad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Rank (A) = 2; Rank (B) = 1; Coppia di rette reali parallele e distinte di equazione :

$$y = -2 \pm \sqrt{6}\ ;$$

ESEMPIO 2. Classificare la conica di equazione : $\mathbf{x^2 - 4xy + 4y^2 - 2 = 0}$, determinare gli elementi caratteristici e rappresentarla.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ; \quad \text{Essendo però :} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

sarà Rank (A) = 2 e RanK (B) =1 con $|B|=0$

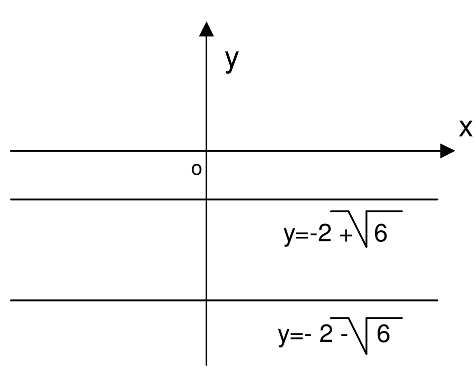
Coppia di rette reali e distinte parallele.

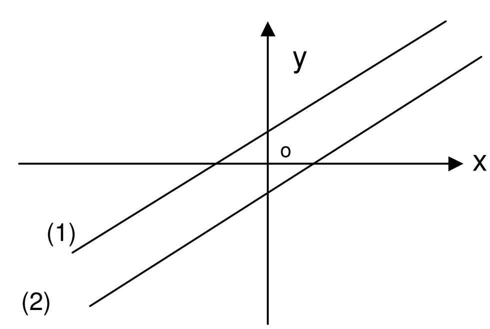
L'equazione si trova da $(x - 2y)^2 = 2$ che implica : (1) $x - 2y + \sqrt{2} = 0$; (2) $x - 2y - \sqrt{2} = 0$

ESEMPIO 3. Classificare la conica di equazione : $\mathbf{x^2 - 4xy + 4y^2 + 2 = 0}$, determinare gli elementi caratteristici e rappresentarla.

Rispetto a quella dell'esempio precedente presenta il termine noto cambiato di segno. Si tratta, come può verificarsi di una coppia di rette parallele e distinte ma complesse e coniugate. Difatti da:

$(x - 2y)^2 + 2 = 0$ seguono le rette : $x - 2y + i\sqrt{2} = 0$; $x - 2y - i\sqrt{2} = 0$





ESEMPIO 4. Classificare la conica di equazione : $\mathbf{x^2 - 4xy + 4y^2 = 0}$,determinare gli elementi caratteristici e rappresentarla.

Essendo il primo membro un quadrato perfetto ($x-2y)^2=0$ avremo due rette parallele reali e coincidenti in considerazione del fatto che Det (B) = 0, Det (A) = 0 (vi sono due linee nulle) ed il rango delle due matrici è1.

Equazione : $x - 2y = 0$

ESEMPIO 5. Classificare la conica di equazione : $\mathbf{x^2 - 6xy + 5y^2 = 0}$, determinare gli elementi caratteristici e rappresentarla.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

Rank (A) = Rank (B) = 2

Rette reali e distinte non parallele

Equazione: $x - y = 0$; $x - 5y = 0$;

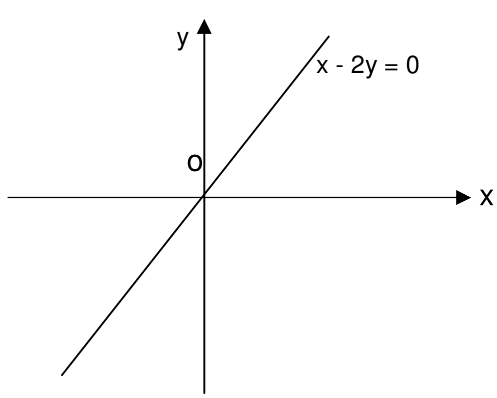
ESEMPIO 6. Classificare la conica di equazione : $\mathbf{x^2 + 2xy + 3y^2 = 0}$, determinare gli elementi caratteristici e rappresentarla.

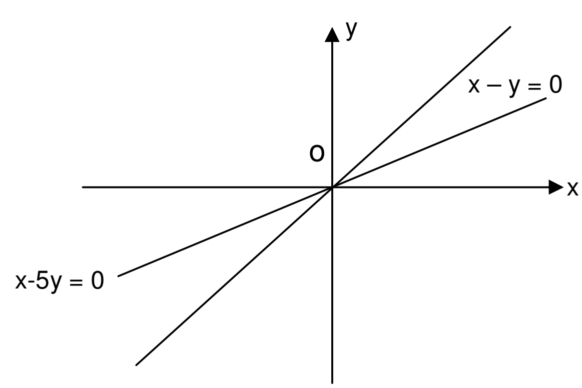
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Rank (A) = Rank (B) = 2

Rette non parallele complesse e coniugate

$$x = -y \pm \sqrt{y^2 - 3y^2} = -y \pm iy\sqrt{2} \Rightarrow x + y - iy\sqrt{2} = 0 \; ; \; x + y + iy\sqrt{2} = 0;$$





Discussione di coniche in forma parametrica

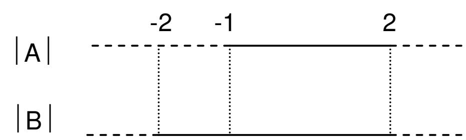
<u>ESEMPIO 1</u>. Sia C la conica di equazione : $\mathbf{x^2 + y^2 + kxy + x + y + 1 = 0}$; si dica:

a) per quali valori di k essa è degenere; b) per quali valori di k si ottiene una parabola;
c) per quali valori di k si ottiene una iperbole; d) per quali valori di k si ottiene una ellisse;
e) può C essere un cerchio ?

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{k}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{k}{2} & \frac{-k^2+4}{4} & \frac{-k+2}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-k+2}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{(-k+2)^2}{16} + \frac{3(4-k^2)}{16} = \frac{-4k^2+8+4k}{16} =$$

$k^2 - k - 2 < 0 \Rightarrow$ Valori interni a $(-1, 2)$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} = 4 - k^2 > 0 \Rightarrow \text{Valori interni a } (-2, 2)$$



a) la conica è degenere per k = 2 e per k =-1; per k=2 essendo det (A) = 0 e det (B) = 0 si avrà una coppia di rette parallele e distinte perché Rank (B) =1 e Rank (A) = 2; per k=-1 essendo det (A) = 0 e det (B) > 0 si avrà una coppia di rette non parallele complesse e coniugate.

b) per $k = -2$ essendo det (A) < 0 e det (B) = 0 si avrà una <u>parabola</u>.

c) per $-2 > k > 2$ essendo det (A) < 0 e det (B) < 0 la conica è una <u>iperbole</u>.

d) per $-2<k<-1$ essendo det (A) < 0 e det (B) > 0 la conica è una <u>ellisse a punti reali</u>.

d) per $-1<k<2$ essendo det (A) > 0 e det (B) > 0 la conica è una <u>ellisse a punti immaginari</u>.

e) per $k = 0$ mancando il termine rettangolare xy la conica sarà <u>un cerchio immaginario</u>.

<u>Verifichiamo</u>

$k = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 - xy + x + y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (1-y)x + y^2 + y + 1 = 0$;$\Delta = 1 - 2y + y^2 - 4y^2 - 4y - 4 = -3y^2 - 6y - 3 =$

$= -3(y+1)^2 \Rightarrow x = (y-1) \pm \sqrt{3}\, i\, (y+1) \Rightarrow -x + (1+\sqrt{3}i)y + \sqrt{3}i - 1 = 0$; $-x + (1-\sqrt{3}i)y - 1 - \sqrt{3}i = 0$;

$k = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 1 = 0$ $(x+y)^2 + (x+y) + 1 = 0$; posto $x+y = t$; $t = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x+2y+1 \pm i\sqrt{3} = 0$

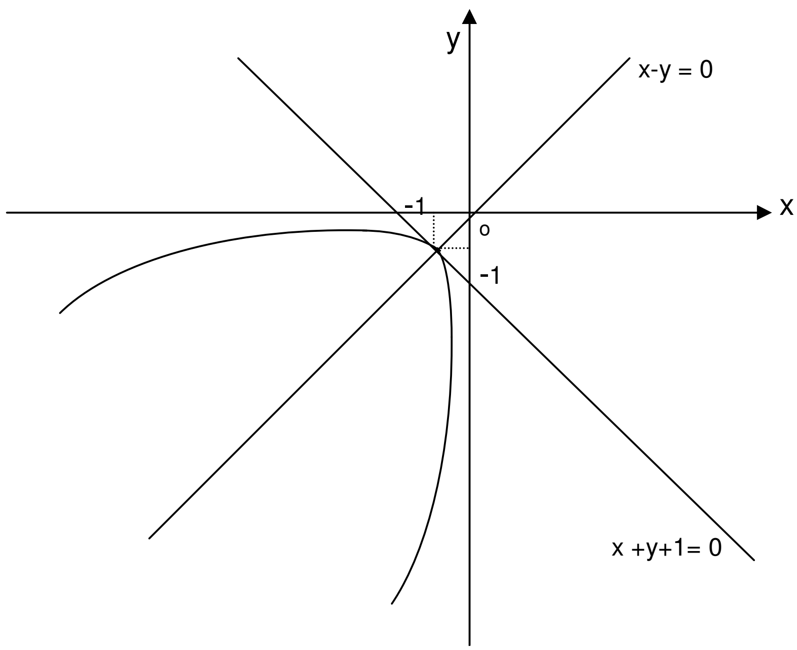
$K = -2 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = -x - y - 1 \Rightarrow (x - y + k)^2 = -x - y - 1 + k^2 + 2kx - 2ky$

$$\begin{cases} x - y + k = 0 \quad \text{(parallela all'asse della parabola)} \\ (2k-1)x - (1+2k)y + k^2 - 1 = 0 \quad \text{(parallela alla tangente nel vertice)} \end{cases}$$

$(1) \perp (2) \Leftrightarrow 2k - 1 + 1 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$

$x - y = 0$ (<u>asse della parabola</u>); $x + y + 1 = 0$ (<u>tangente nel vertice</u>)

<u>Vertice</u> : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ <u>Non interseca gli assi</u>

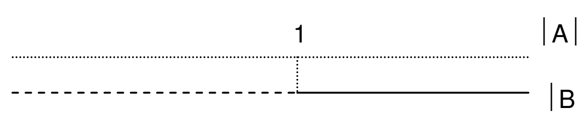


<u>ESEMPIO 2</u>. Classificare al variare di k la conica: $\mathbf{x^2 + ky^2 + 2xy + 2ky + 2 = 0}$, si dica per quale valore di k si ha una circonferenza; si studi per k = 0 e si trovi una forma canonica.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & k \\ 0 & k & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k \\ 0 & k & 2 \end{vmatrix} = -k^2 + 2k - 2 \geq 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A) < 0 \ \forall\, k \in R$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k - 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq 1$$



Non vi sono coniche degeneri. Non esiste k per cui C diventa una circonferenza , poiché il termine xy non dipende da k. Se **k>1** si ha un'**ellisse reale**; se k<1 si ha una **iperbole**; per **k=1** si ha una **parabola**.

$$k=0 \Rightarrow x^2 + 2xy + 2 = 0 \Rightarrow$$ <u>Iperbole di centro</u> (0, 0)

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -1 - \lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Essendo (0,0) il centro gli assi hanno equazione uguale a quella degli autospazi.

$$V_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + y = 0;$$ (<u>primo asse</u>) $$V_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}x + y = 0$ (<u>secondo asse</u>) <u>Asintoti</u>: $x^2 + 2xy = 0 \Rightarrow x(x + 2y) = 0 \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

per quanto detto prima anche gli asintoti si ricavano direttamente dai termini di secondo grado eguagliati a zero.

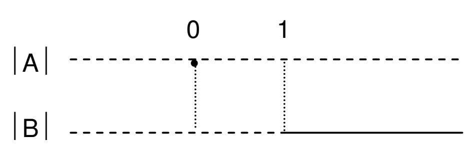
<u>Forma canonica</u>

$$C = -\frac{\det(A)}{\det(B)} = 2; \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2 = 2$$

<u>ESEMPIO 3</u>. Classificare al variare del parametro k la conica Γ di equazione: $\mathbf{kx^2 + y^2 + 2xy + 2kx = 0}$, e determinarne una forma canonica per k =1.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} = k(-k) \geq 0 \Rightarrow k^2 \leq 0 \Leftrightarrow k = 0;$$

$$|B| = k - 1 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 1;$$



per k = 0 si ha una conica degenere; essendo det (A) = 0 e det (B) < 0 si tratterà di una coppia di rette reali e distinte non parallele: $y^2 + 2xy = 0 \Rightarrow y = 0;\ y + 2x = 0$; per $(k < 1) \cap (k \neq 0)$,essendo det (A) < 0 e det(B)< 0 si ha una iperbole; per k >1 essendo det(A) < 0 e det (B) > 0 si ha un'ellisse a punti reali; non esiste valore di k per cui si ha una circonferenza. Per k =1 si ha una parabola, det(B) = 0 det(A) < 0.

$$(x + y + k)^2 = -2x + 2kx + 2ky + k^2 \Rightarrow (x + y + k)^2 = 2(k-1)x + 2ky + k^2$$

la retta: $x + y + k = 0$ sarà perpendicolare alla retta : $2(k-1)x + 2ky + k^2 = 0$

$$\Leftrightarrow aa' + bb' = 0 \Leftrightarrow 2(k-1) + 2k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

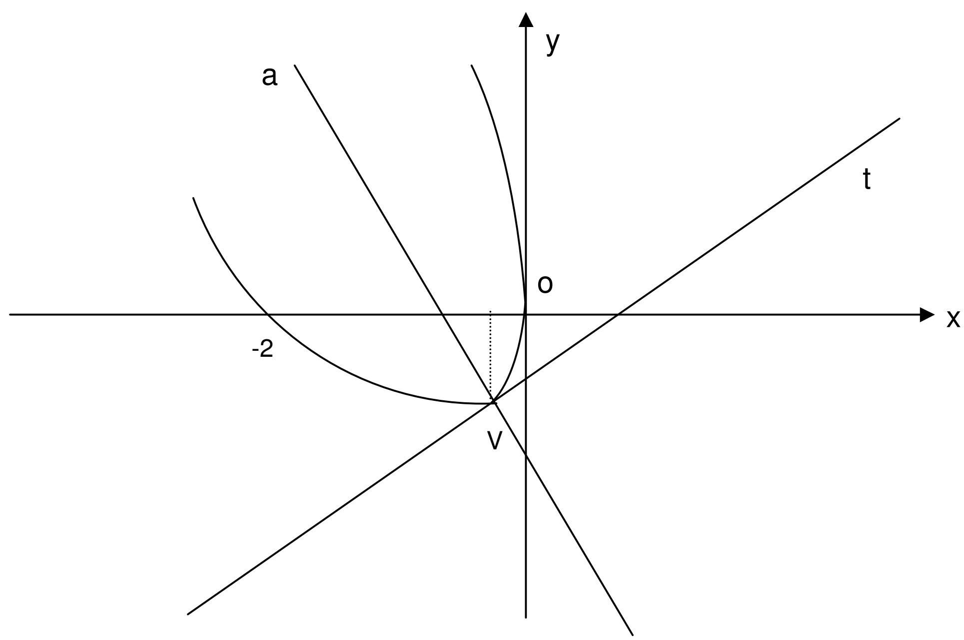
$$\begin{cases} 2x + 2y + 1 = 0 \ (\underline{\text{Asse della parabola}}); & \text{Intersecando si ha il vertice } V\left(\dfrac{-1}{8}, \dfrac{-3}{8}\right) \\ -4x + 4y + 1 = 0 \ (\underline{\text{tangente nel vertice}}); & \text{Intersezione assi: } y = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = -2; \end{cases}$$

<u>Forma canonica :</u> $\lambda_1 x^2 = \pm\, 2cy$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0;$$

$$2x^2 = \pm\sqrt{2}\ y$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{\lambda_1}}$$

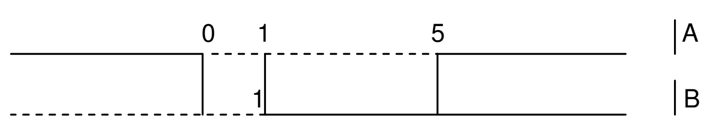


<u>ESEMPIO 4</u>. Studiare, al variare del parametro k reale, la conica di equazione: $\mathbf{x^2 + ky^2 + 2xy + 4x + k = 0}$; in particolare per k = -1 si determinino gli elementi caratteristici ed una forma canonica.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-k & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2k & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ -2k & k \end{vmatrix} = k^2 - 5k \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$5 \leq k \leq 0$$

$|B| = k - 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq 1$



Per k = 0 si ha una conica degenere, essendo det(A) = 0, rank(A)=2, e det(B)< 0,che è una coppia di rette reali e distinte non parallele: $x^2 + 2xy + 4x=0$ da cui $x(x + 2y+ 4)=0$ ci dà le due rette reali incidenti: $x=0$ e $x+2y+4=0$.
Per k = 5 essendo det(A), anche questa volta, uguale a zero, rank(A)=2, e det(B) > 0 la conica degenera in una coppia di rette complesse e coniugate non parallele: $x^2 +5y^2 +2xy + 4x +5=0 \Rightarrow x^2 +(2y+4)x +5y^2 +5=0$ da cui
$x= - (y+2)\pm\sqrt{y^2+4+4y -5y^2-5} = - (y+2)\pm i\sqrt{(2y-1)^2} \Rightarrow x + y + 2- i(2y-1) = 0 \Rightarrow x + (1-2i)y + 2 + i = 0,$

$x + y+2 + i(2y-1)= 0 \Rightarrow x + (1+2i)y + 2- i =0,$ (y>1/2).

Per k=1 det(A) < 0 e det(B) =0 ⇒rank(A)=3 e rank(B)=1 si ha una parabola reale. Partendo da:
$x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (x+y)^2 = - 4x-1\Rightarrow (x+y+k)^2 = - 4x -1+2kx +2ky +k^2 \Rightarrow (2k-4)x+2ky + k^2 -1=0$ per la perpendicolarità: $1(2k-4)+ 1(2k)=0 \Rightarrow k =1$ quindi $x+y+1=0$ (asse della parabola)
ed $-2x+2y=0$ cioè: $x - y = 0$ (tangente alla parabola nel vertice). Intersezione con gli assi: $x=0 \Rightarrow$ non interseca l'asse y, $y=0 \Rightarrow$ non interseca l'asse x. **Forma canonica**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 -2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=0;\ \lambda_1 x^2 = \pm 2cy;\quad c=\sqrt{-(-4)/2} =\sqrt{2} \ \Rightarrow\ x^2 = \pm\sqrt{2}\, y.$$

k<0 essendo det(A)>0 e det(B)<0 si tratta di una iperbole reale.
k>5 essendo det(A)>0 e det(B)>0 ellisse a punti reali immaginari
1<k<5 essendo det(A)<0 e det(B)>0 ellisse a punti reali.
0<k<1 **e**ssendo det(A)<0 e det(B)< 0 iperbole a punti reali.

Per k=-1 si ha una iperbole a punti reali: det(A)=6 e det(B)=-2. $x^2 - y^2 + 2xy + 4x -1=0$; Centro: $\begin{cases} 2x+2y+4=0 \\ -2y + 2x=0 \end{cases}$
x = y dalla seconda, comporta che sia y = x = -1 quindi C(-1, -1). Calcoliamo gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -1 -1 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 =\sqrt{2},\ \ \lambda_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow V_{\sqrt{2}}: \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\sqrt{2})x + y = 0$$

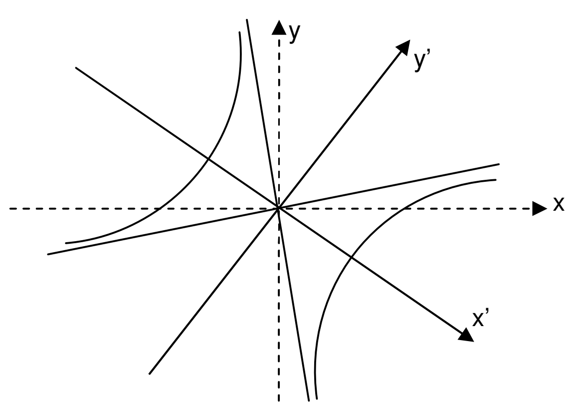
$$V_{-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =0 \Rightarrow (1+\sqrt{2})x + y = 0.$$

$(1-\sqrt{2})x + y + k = 0 \Rightarrow k = 2 - \sqrt{2}$

$(1+\sqrt{2})x + y + k = 0 \Rightarrow k = 2 +\sqrt{2}$

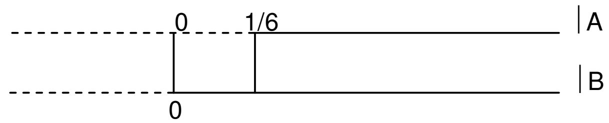
$(1-\sqrt{2})x + y + 2 - \sqrt{2} = 0$ (primo asse) $(1+\sqrt{2})x + y + 2+\sqrt{2}= 0$ (secondo asse).

FORMA CANONICA: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$; $c = -\dfrac{\det (A)}{\det(B)} = 3 \Rightarrow \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 =3$. Iperbole equilatera, asse trasverso è l'asse delle x, gli asintoti sono le bisettrici: x-y=0 e x+y=0. Eccentricità : √2. Il grafico si riferisce all'altra forma dell'iperbole. Per nessun valore di k si può avere una circonferenza.



ESEMPIO 5. Classificare, al variare di k∈R le coniche: $kx^2 + 2y^2 - 2x + 6 = 0$. Precisare per quale valore di k si ha una circonferenza. Per k=1 studiare la conica, determinando centro e assi o vertice ed asse, ed una forma canonica.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2(6k-1) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 1/6; \quad |B| = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0.$$



Per k = 1/6, essendo det(A) = 0 (rank(A) = 2) e det(B) > 0 (rank(B)= 2), si ha una coppia di rette complesse e coniugate non parallele.
$x^2 + 12y^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 + 12y^2 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 - i^2(2\sqrt{3}y)^2 = 0 \Rightarrow x - 6 - 2i\sqrt{3}y = 0$,
$x - 6 + 2i\sqrt{3}y = 0$.

Per k = 0, essendo det(B) = 0 (rank((B) = 1) e det(A)< 0 (rank(A) = 3), si ha una parabola. Dei due autovalori λ_1 e λ_2 uno è zero.

Per 0<k<1/6, essendo det(A) < 0 e det(B) > 0, si ha una ellisse a punti reali.

Per k>1/6, essendo det(A) > 0 e det(B) > 0, si ha una ellisse a punti immaginari.

Si ha una circonferenza per k = 2: $x^2 + y^2 - x + 3 = 0$ di centro C(1/2,0) e raggio immaginario. Si vede che i due auto valori λ_1 e λ_2 sono uguali a 2.

Per k = 1 si ha un'ellisse immaginaria: $x^2 + 2y^2 - 2x + 6 = 0$.

Centro : $\begin{cases} 2x-2=0 \Rightarrow x = 1 \\ 4y=0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$ sostituendo nella traccia: 1+ 0 - 2 +6 > 0 (conferma che è una ellisse immaginaria)

Autovalori: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2, \lambda_1 = 1$. (concordi)

Autospazi: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0$ (V_2 e V_1).

$x + k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = 1$ (primo asse) **Forma canonica**: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$
$y + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow y = 0$ (secondo asse)

det(A) = 10, det(B) = 2, - det(A)/det(B) = - 5; $x^2 + 2y^2 = -5$.